側円術(7)等側圓

著者	米山 忠興
雑誌名	東洋大学紀要．自然科学篇
号	56
ページ	129-139
発行年	2012-03
URL	http://id.nii.ac.jp/1060/00005328/

側円術Ⅶ.*

―― 等側圓 ――

米 山 忠 興**

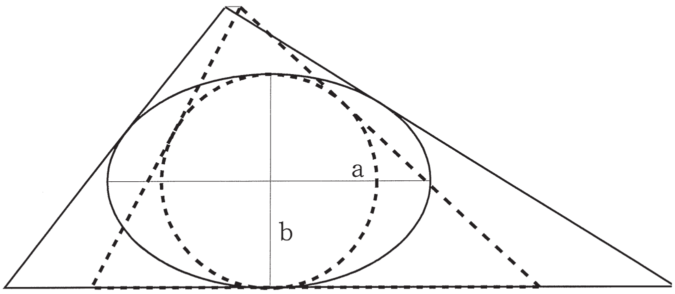
Ellipse in Japanese Historical Mathematics VII.

―― Equal Ellipses Inscribed in Segmental Triangles ――

Tadaoki YONEYAMA

和算家は、三角形に内接する楕円の長径：短径比が $a : b$ のとき、長径方向に $\dfrac{b}{a}$ 倍すると、三角形に内接する円の簡単な問題になることを活用して、問題を解決していた。

今回は、等側円に至るまでの、「界斜」を隔てて等しい二つの円が入っている三角形の解法を、順に考えていく。



☆勾股側円（1）

以下の勾股側円（1）と（2）及び三斜側円は、會田筭左衛門安明の和算書『算法天生法指南巻之五』（文化七年刊）の第一問〜第三問である。

現代人はこれらの問題を見て、楕円とその接線の問題だから計算が結構大変だろうと思うかも知れないが、とくに勾股側円（1）と（2）は、江戸時代に算術を少し習った者にとっては、初心者向けの易しい問題である。

---

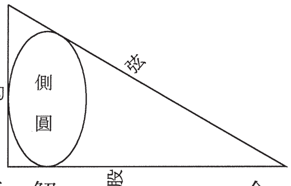
*) この研究は、平成 22 年度〜 23 年度の東洋大学特別研究（個人研究）の研究期間に行なわれた。

**) 東洋大学自然科学研究室
〒 112-8606　東京都文京区白山 5-28-20
Natural Science Laboratory, Toyo University, 28-20 Hakusan 5, Bunkyo-ku, Tokyo, 112-8606 Japan

算法天生法指南巻之五

最上流元祖　會田算左衛門安明　編集

門人　渡邊市之　市瀬丸田　校訂



今有如圖勾股内容側圓只云勾二十一寸股二十八寸側圓短徑七寸問側圓長徑幾何

答曰側圓長徑一十八寸

解曰側圓ナル者ハ全圓ニ本ク故ニ側圓長徑ヲ以テ全圓ニ作リ而メ大形ノ勾股弦トス又側圓短徑ヲ以テ全圓ニ作リ而メ小形ノ勾股弦トス則チ大形ハ勾ヲ規リトシ小形ハ股ヲ規リ（ト）ス是ニ於テ其形ヲ見レハ同規ノ勾股弦トナル故ニ同規ノ術ニ仍テ其答術ヲ得ルコト左ノ如シ

矩曰置混沌之一・・・・（中略）

術曰以股短徑半差除股短徑差乗勾得長徑合問

図１

［解ニ曰ク］では、楕円の$\frac{長}{短}$および$\frac{短}{長}$の比で図形を横方向・縦方向に拡大・縮小した図形を、それぞれ、大形・小形として、相似（同規）の直角三角形の内接円を考えているようである。

大形を作るときは、勾を基線として拡大し、小形を作るときには、股を基線として、縮小形を作るという。しかし、以下に示すように、この大形・小形の両方を考える必要は無い。

「メ（〆）」は、「為」の草書簡略体で、「而メ＝シコウシテ」。

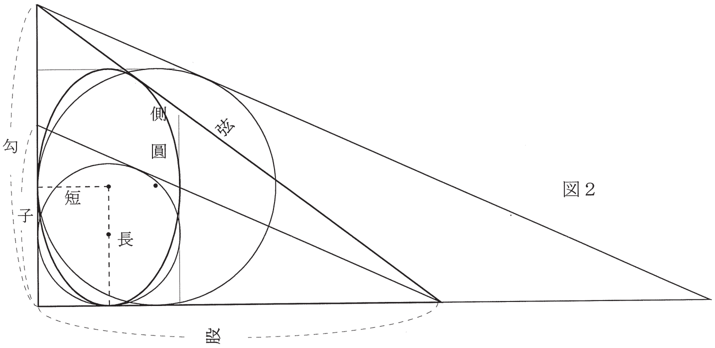


図２

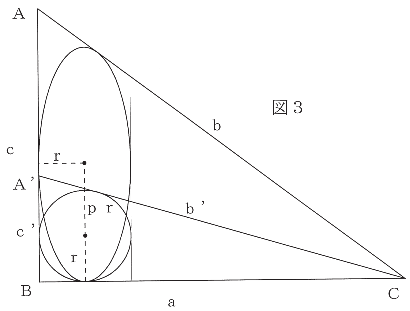


図3

［現代解］

AB ＝ 勾 ＝ c 　＝ 21 寸

BC ＝ 股 ＝ a 　＝ 28 寸

　　短 ＝ $2r$ ＝ 　7 寸

　　長 ＝ $2pr$

短径は、かなり小さく細長い楕円である。

AB を $\frac{1}{p}$ 倍して A’ B になるとする。

$$c = c'p$$
$$b' = a + c' - 2r$$
$$b'^2 = a^2 + c'^2 = (a + c' - 2r)^2$$

$$a^2 + c'^2 = (a + c')^2 - 4r(a + c') + 4r^2$$
$$0 = 2ac' - 4r(a + c' - r)$$
$$(a - 2r)\ c' = 2r(a - r)$$

$\times p$：

$$(a - 2r)\ c'p = 2pr(a - r)$$
$$2pr = \frac{c(a - 2r)}{a - r}$$
$$長 = \frac{勾(股 - 短)}{股 - 短／2}$$
$$= \frac{21(28 - 7)}{28 - 7／2} = 18\ (寸).$$

細かい説明は不要であろう。

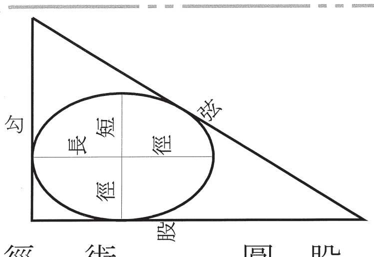
☆勾股側円（2）

これも前の勾股側円（1）とほとんど同様である。

楕円の長径・短径を $2pr$, $2r$ とし、元の図を長径方向に $\frac{1}{p}$ 倍すると、元の楕円は半径 r の円になるはずである。

図 5 のように、もとの勾股弦を c, a, b とし、$\frac{1}{p}$ 倍に縮尺したときを c, a', b' とする。

$$a = pa'$$
$$b' = a' + c - 2r$$



算法天生法指南　巻之五
今有如圖勾股内容側圓只云勾一十五寸
股二十寸圓短徑五寸問側
圓長徑幾何
答曰側圓長徑一十六寸
術曰勾短徑差乗股以勾短
徑半差除之得長徑合問

図４

また、

$$b'^2 = a'^2 + c^2 = (a' + c - 2r)^2$$

$$0 = 2a'c - 4r(a' + c) + 4r^2$$

$$a'(c - 2r) = 2r(c - r)$$

$\times p$：

$$a'p(c - 2r) = 2pr(c - r)$$

$$2pr = \frac{a(c - 2r)}{c - r} = \frac{a(c - 2r)}{c - (2r)／2}$$

これは、術文：

$$長 = \frac{股(勾 - 短)}{勾 - 短／2}$$

と一致している。

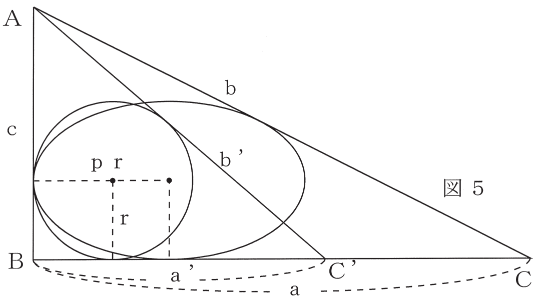


図 5

ところで、問題に与えられた勾・股・短の数値を用いると、下の図6のように、かなり扁平になるので、図4, 図5では、短径を大きく描いた。

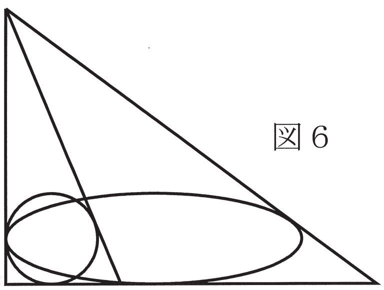


図6

☆三斜側円

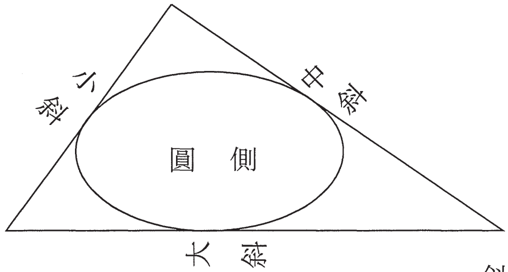
算法天生法指南　巻之五

今有如圖三斜内容側圓只云大斜一十五寸中斜一十四寸小斜一十三寸側圓短徑一寸問長徑幾何

答曰長徑一十四寸三分一四有奇

解曰此題ナル者ハ三斜ノ箱ノ内ニ圓壔ヲ容レ而メ斜メニ是ヲ截ルトキハ其截口ノ平面即チ此題ノ形トナル故ニ其答術ヲ得ル事左ノコトシ

矩曰混沌之一命長徑・・・（中略）



術曰以大斜除中斜冪小斜冪差名天加大斜半之自之以減中斜冪餘開平方名地内減短徑名人加地以除天因短徑自之以減大斜冪餘乗人以地除之開平方得長徑合問

図7

問題文は､「三角形と楕円の短径を与えて長径を求めよ」という。上の會田筭左衛門の『算法天生法指南』のほか、村田恒光の『算法楕円解』（天保十三年刊）にも出ている問題である。

「解ニ曰ク、矩ニ曰ク」では、三斜に内接する楕円を、三角柱に容れられている円筒を図8のように2点鎖線で截った形として捉えているようであるが、問題を現代的に解くのには、あまり必要は無さそうである。

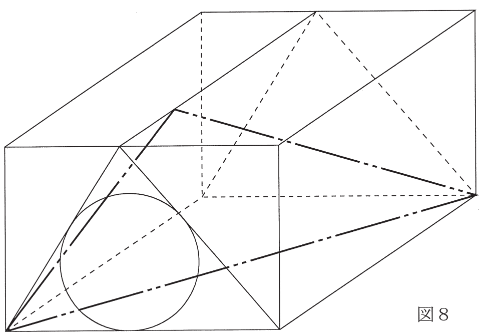
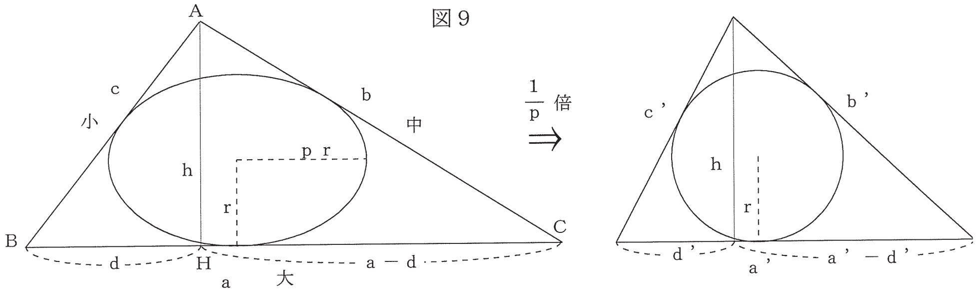


図8

（解）前問と同様に、楕円の長径・短径をpr, rとし、元の図を長径方向に$\dfrac{1}{p}$倍すると、もとの楕円は半径rの円になる。

図９のように、もとの三角形の三辺を a, b, c とし、長径方向に $\dfrac{1}{p}$ 倍に縮尺したときを a', b', c' とする。また高さ（中鉤）を h とし、図のように BH を d とする。



あとは、殆んど三平方の定理だけで解決できる。

$$\begin{cases} d^2 = c^2 - h^2 \\ (a-d)^2 = b^2 - h^2 \end{cases}$$

この２式から、

$$(a-d)^2 - d^2 = b^2 - c^2$$

$$a^2 - 2ad = b^2 - c^2$$

$$a^2 - b^2 + c^2 = 2ad$$

$$\therefore \quad d = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}$$

また、

$$h^2 = c^2 - d^2 = c^2 - \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}\right)^2 = b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right)^2$$

ここからは、

$$\begin{cases} a, b, c, r : given \\ a', b', c', d', p : unknown \end{cases}$$

として、最終的に長径：$2pr$ を求める。

$$\begin{cases} a = pa' \\ d = pd' \end{cases}$$

$$\begin{cases} d'^2 = c'^2 - h^2 \\ (a' - d')^2 = b'^2 - h^2 \\ \dfrac{a'h}{2} = \dfrac{r}{2}(a' + b' + c') \end{cases}$$

$$b'^2 - c'^2 = (a' - d')^2 - d'^2 = a'^2 - 2a'd' = a'(a' - 2d')$$

$$r(b' + c') + ra' = ha'$$

$$r(b' + c') = (h - r)a'$$

$$\therefore \quad \frac{(b' - c')\ (b' + c')}{r(b' + c')} = \frac{a'(a' - 2d')}{(h - r)a'}$$

$$b' - c' = \frac{a' - 2d'}{h - r} r$$

$$b' + c' = \frac{(h-r)}{r} a'$$

$$2c' = \frac{(h-r)^2 a' - r^2(a' - 2d')}{r(h-r)}$$

$$= \frac{(h^2 - 2hr)a' + 2r^2 d'}{r(h-r)}$$

$$= \frac{ha'(h-2r) + 2r^2 d'}{r(h-r)}$$

$d'^2 = c'^2 - h^2$　だから

$\times 4p^2$：

$$4p^2 d'^2 = 4p^2 c'^2 - 4p^2 h^2$$

$$4d^2 = \left[\frac{ha'(h-2r) + 2r^2 d'}{r(h-r)}\right]^2 \cdot p^2 - 4p^2 h^2$$

$$4p^2 h^2 = \left[\frac{ha(h-2r) + 2r^2 d}{r(h-r)}\right]^2 - 4d^2$$

$$4p^2 h^2 r^2 (h-r)^2$$

$$= [ha(h-2r) + 2r^2 d]^2 - 4d^2 r^2 (h-r)^2$$

$$= [ha(h-2r) + 2r^2 d + 2dr(h-r)] \times [ha(h-2r) + 2r^2 d - 2dr(h-r)]$$

$$= [ha(h-2r) + 2drh] \times [ha(h-2r) - 2dr(h-2r)]$$

$$= h(h-2r)[a(h-2r) + 2dr] \times [ah - 2dr]$$

$$4p^2 hr^2 (h-r)^2 = (h-2r)[a(h-2r) + 2dr]\ [ah - 2dr]$$

$$= (h-2r)\left[a(h-2r) + \frac{a^2 - b^2 + c^2}{a} r\right] \times \left[ah - \frac{a^2 - b^2 + c^2}{a} r\right]$$

$$= \frac{(h-2r)}{a^2}[a^2(h-r) - (b^2 - c^2)r][a^2(h-r) + (b^2 - c^2)r]$$

$$= \frac{(h-2r)}{a^2}[a^4(h-r)^2 - (b^2 - c^2)^2 r^2]$$

$$\therefore\ (\text{長径})^2 = (2pr)^2$$

$$= \frac{1}{h(h-r)^2} \cdot \frac{(h-2r)}{a^2} \cdot (h-r)^2 \left[a^4 - \frac{(b^2 - c^2)^2}{(h-r)^2} r^2\right]$$

$$= \frac{(h-2r)}{h}\left[a^2 - \frac{(b^2 - c^2)^2 r^2}{a^2 (h-r)^2}\right]$$

（三斜側円）

會田の筭法天生法指南の術文は、「大斜を以て中斜冪（べき）小斜冪の差を除し天と名づく。大斜を加え之を半（なか）ばし之を自（みずから）し以て中斜冪より減じ、余りを平方に開き地と名づく。うち短徑を減じ人と名づく。地を加え、以て天因短径を除し、之を自し、以て大斜冪より減じ、人を乗じ地を以て之を除し、平方に開けば長径を得る。問いに合う。」となっている。これを式に書けば右のようになり、上の計算式と合致している。

なお、条件文の数値を用いて図形を描けば、右の図10ような、非常に細長い楕円図形になる。どうせ長径が整数にならないのなら、もう少しバランスのとれた図形にした方がよかったと思われるが、なぜだろうか。

$$\frac{中^2-小^2}{大}=天$$

$$\sqrt{中^2-\left[\frac{\dfrac{中^2-小^2}{大}+大}{2}\right]^2}=地\,(=h)$$

$$地-短=人$$

$$(地-短)+地=2\,地-短$$

$$\sqrt{\left[大^2-\left[\frac{\dfrac{中^2-小^2}{大}\times短}{2\,地-短}\right]^2\right]\times\frac{(地-短)}{地}}=長$$

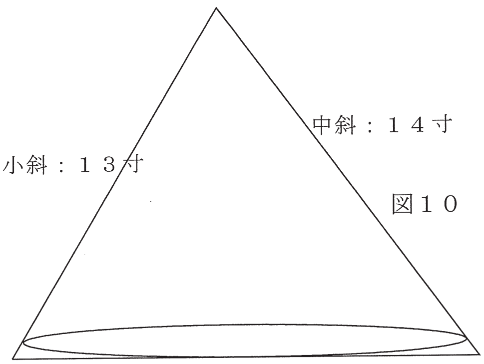


図１０

この問題も、和算家の「縮図法」（あるいは洋算のアフィン変換）を知らないと、かなりの難問になってしまうことだろう。

☆等側円

精要算法 巻之下

今有如図三斜内容等側円二箇只云大斜六千六百一十五寸

中斜五千三百五十五寸 小斜三千一百五十寸 短径三百一十五寸

問長径幾何

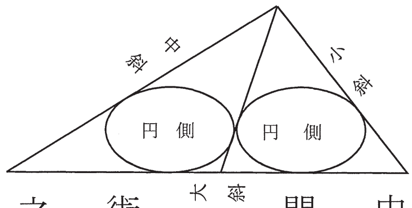


図11

答曰長径三千〇八十二寸〇〇〇有奇

術曰置中斜自之内減小斜冪餘以大斜除之名甲加大斜半之自之以減中斜冪餘平方開之名乙内減短餘名丙自之加乙冪名丁列丙加乙名戊乗丁為法　列戊乗甲及短径得数自之以減大斜冪與丁冪相乗數餘平方開之乗丙以法除之得長径合問

上の図 11 が藤田定資『精要算法巻之下』（1781 年）にある、「三角形の中に、斜を隔てて等しい楕円を容れる。三角形と楕円の短径を与えて、長径を求めよ。」という等側円の問題である。先の算法天生法指南にある「三斜側円」と合わせるために、以下の（解）では、図の左右（中斜と小斜）を入れ替えた。

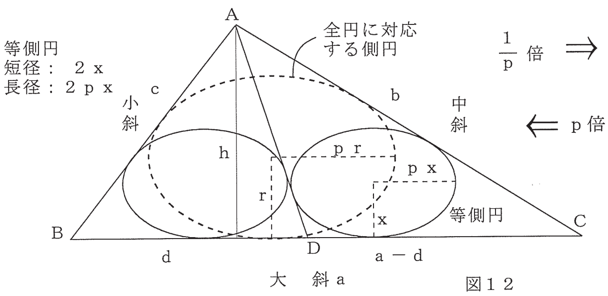


図１２

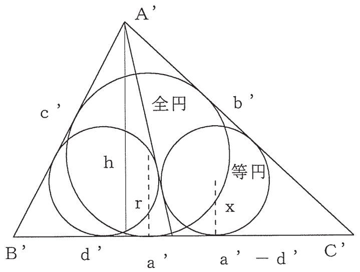


図１３

図 12 の 2 つの等しい楕円（等側円）の長径が短径 x の p 倍であるとする。この図形を、長径方向（ヨコ方向）に、$\dfrac{1}{p}$ 倍すると、図 13 の 2 つの等円になる。このとき、もとの三

角形⊿ ABC が⊿ A'B'C' になったとする。その⊿ A'B'C' の内接円（半径 r の全円）をヨコ方向に p 倍すると、もとに戻って、図 12 の大きな楕円（全側円と呼ぶ）になることがわかる。

三角形の中勾（h）については、先に解いた三斜側円から、

$$h^2=c^2-d^2=c^2-\left(\frac{a^2-b^2+c^2}{2a}\right)^2=b^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right)^2$$

であり、図 13 の全円に対応する図 12 の全側円については、

$$\text{長径}^2=(2pr)^2=\frac{(h-2r)}{h}\left(a^2-\frac{(b^2-c^2)^2r^2}{a^2(h-r)^2}\right)$$

であった。また等円術から、

$$\left(1-\frac{2r}{h}\right)=\left(1-\frac{2x}{h}\right)^2.$$

$$\frac{2r}{h}=1-\left(1-\frac{2x}{h}\right)^2=\frac{4x}{h}-\frac{4x^2}{h^2}=\frac{4x(h-x)}{h^2}$$

$$\therefore\quad r=\frac{2x(h-x)}{h}.$$

$$\begin{aligned} h-r &= h-\frac{2x(h-x)}{h}=\frac{h^2-2x(h-x)}{h}\\ &=\frac{h^2-2xh+2x^2}{h}=\frac{h^2+(h-2x)^2}{2h}\end{aligned}$$

また、$h-2r$ は等円術から、

$$1-\frac{2r}{h}=\left(1-\frac{2x}{h}\right)^2\Rightarrow\frac{h-2r}{h}=\frac{(h-2x)^2}{h^2}$$

これらの式を $(2pr)^2$ に代入して、

$$\left(2p\cdot\frac{2x(h-x)}{h}\right)^2$$

$$=\frac{(h-2x)^2}{h^2}\left(a^2-\frac{(b^2-c^2)^2}{a^2}\cdot\frac{4x^2(h-x)^2}{h^2}\cdot\frac{4h^2}{\{h^2+(h-2x)^2\}^2}\right)$$

$$(2px)^2=(h-2x)^2\left(\frac{a^2}{(2h-2x)^2}-\frac{(b^2-c^2)^2\cdot 4x^2}{a^2\{h^2+(h-2x)^2\}^2}\right)$$

よって

$$(\text{等側円長径})^2=(h-\text{短})^2\left(\frac{\text{大}^2}{(2h-\text{短})^2}-\frac{(\text{中}^2-\text{小}^2)^2\cdot\text{短}^2}{\text{大}^2\{h^2+(h-\text{短})^2\}^2}\right)$$

術文は以下のようであり、上記の解と一致している。

$$\frac{\text{中}^2-\text{小}^2}{\text{大}}=\text{甲},\qquad \sqrt{\text{中}^2-\left(\frac{\frac{\text{中}^2-\text{小}^2}{\text{大}}+\text{大}}{2}\right)^2}=\text{乙}(=\text{中勾}=h)$$

（☆三斜側円を参照）

h −短＝丙

$(h$ −短$)^2 + h^2$ ＝丁

$(h$ −短$) + h$ ＝戊

　$(2h$ −短＝戊$)$

$(2h$ −短$)\ \{(h$ −短$)^2 + h^2\}$ ＝法

$$\sqrt{大^2\,丁^2 - \left\{(2h - 短)\,\frac{(中^2 - 小^2)}{大}短\right\}^2 \times \frac{(h - 短)}{(2h - 短)\{(h - 短)^2 + h^2\}}} = 長$$

ゆえに　$長 = (h - 短)\sqrt{\dfrac{大^2}{(2h - 短)^2} - \dfrac{(中^2 - 小^2)^2 \cdot 短^2}{大^2\{(h - 短)^2 + h^2\}^2}}$.

この問題は、和算家の「等円術」と「側円術」を応用すれば、それほど難しい問題ではないと思われる。

ところで、問題文の条件は、

大＝ 6615 ＝ $5 \times 3^3 \times 7^2$

中＝ 5355 ＝ $5 \times 3^2 \times 7 \times 17$

小＝ 3150 ＝ $5^2 \times 3^2 \times 2 \times 7$

短＝　315 ＝ $5 \times 3^2 \times 7$

であり、大，中，小，短は $3^2 \times 5 \times 7 = 315$ を最大公約数として持つから、以下では

大＝ 21

中＝ 17

小＝ 10

短＝　1

とする。そうすると、前の三斜側円で中勾 h は、

$$h = 地 = (乙) = \sqrt{中^2 - \left[\frac{(大^2 + 中^2 - 小^2)}{2\,大}\right]^2}$$

で与えられているから、

$h = 8$

h −短＝ 7

$2h$ −短＝ 15

である。よって、

$$長 = 7 \times \sqrt{\left[\frac{21}{15}\right]^2 - \left[\frac{(17^2 - 10^2) \times 1}{21 \cdot (7^2 + 8^2)}\right]^2} = 7 \times \sqrt{\left[\frac{7}{5}\right]^2 - \left[\frac{9}{113}\right]^2}$$

$$\fallingdotseq 9.7841284 \fallingdotseq \frac{3082.0005}{315}$$

である。すなわち、これを 315 倍すると、問題文の条件のように答えの小数点以下 3 桁が・・・・.000・・となる。

和算家は整数（あるいはきれいな数）が好きだから、315 倍してやっと「0」を 3 つ並べたのに、「余計なことをするな」と泉下で怒っているかもしれない。

（等側圓の項　終り）